

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазина Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

3-дәріс. Қозғалыс интегралы. Орбитаның кеплер элементтері

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға екі дене есебі және оның негізінде алынатын орбита теңдеуін түсіндіру; аспан механикасындағы қозғалыс заңының мәнін ашу; орбитаның кеплер элементтерін және олардың орбита пішінін, кеңістіктегі орналасуын сипаттайтын рөлін меңгерту.

Жоспар

1. Екі дене есебіндегі орбита теңдеуі және қозғалыс заңы
2. Орбитаның Кеплер элементтері

1. Екі дене есебіндегі орбита теңдеуі және қозғалыс заңы

Қозғалыс интегралы — бұл қозғалыс теңдеулерінен алынған және уақыт бойынша тұрақты болатын шама.

Ол энергия, импульс, момент сияқты физикалық шамалардың сақталуын көрсетеді. Әрбір интеграл жүйенің симметриясына сәйкес келеді (Нөтер теоремасы бойынша).

Екі дене есебінде екі материалдық нүктенің (m, M) қозғалысын қарастырамыз. m нүктенің $\vec{r}$ - радиус-векторы және $\dot{\vec{r}}$ - оның жылдамдығы $\vec{c}$ - момент векторына перпендикуляр болғандықтан, кеңістікте осы векторларымен анықталған жазықтықтың бағыттауы тұрақты болады. $\vec{r}$ векторы жазықтықта болғандықтан, осы жазықтықта M_0 - координат басы белгіленеді. Жазықтықта m нүктесі қозғалады, бірақ X, Y, Z координат жүйесінде жазықтық қозғалыссыз болады. Жазықтықтың теңдеулерін векторлық және координаттық түрінде жазуға болады:

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0,$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0,$$

c_1, c_2, c_3 - $\vec{c}$ вектордың компоненттері.

$\vec{\lambda}$ - Лаплас векторы $\vec{c}$ - қозғалыс жазықтықтың нормаль векторына перпендикуляр болғандықтан, осы жазықтықта орналасады. Сонда қозғалыс жазықтығына ξ, η - **тікбұрышты** және r, ν - **полярлы координат жүйелерін** енгізуге болады. ξ - осі $\vec{\lambda}$ -Лаплас векторының бойымен бағытталған, ν - **полярлы бұрыш (шын аномалиясы)** $\vec{\lambda}$ векторының бағытынан есептеледі. Егер $\vec{c}$ момент векторының бойымен бағытталған ζ - осьті енгізген кезінде, **орбиталдық координат жүйесі** пайда болады. Осы ξ, η, ζ - координат жүйесі қозғалыс жызықтығымен байланыста болады.

Көбінесе бастапқы координат жүйесі ретінде гелиоцентрлік эклиптикалық немесе геоцентрлік экваториалды жүйелер қарастырылады. Қажетті жағдайларда селеноцентрлік немесе планетоцентрлік координат жүйелерін таңдайды. Егер қос жұлдыз жүйесі қозғалысын қарастырғанда,

көбінесе аспан сферасына жанама болатын бейнелік жазықтығын бастапқы координат жүйесінің негізгі жазықтығы ретінде алады.

r, ν полярлы жүйедегі m нүктенің орбита теңдеуін анықтау үшін λ Лаплас интегралы мен $\vec{r}$ радиус векторының скалярлы көбейтіндісі алынады:

$$r\lambda \cos \nu = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r}^2}{r} = c^2 - \mu r.$$

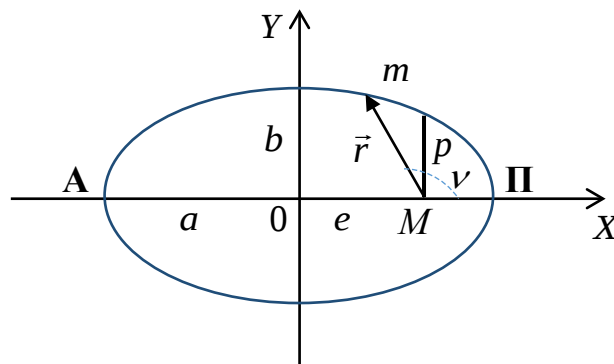
Осыдан

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cos \nu}$$

немесе

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1)$$

p - қисықтың фокалды параметрі - фокус арқылы өтетін эллипстің үлкен осіне, гиперболаның нақты осіне немесе параболаның симметрия осіне перпендикуляр орналасқан фокалды жартылай хорданың ұзындығына тең болады.



1 сурет – Эллипстік орбита бойымен материалдық нүктенің қозғалысы

e – **эксцентриситет**, екінші дәрежедегі қай қисыққа байланыстығын анықтайды. Егер эксцентриситеттің мәні $e = 0$ болса, сонда қисықтың түрі – дөңгелек, $e < 1$ - эллипс, $e = 1$ - парабола, $e > 1$ - гипербола. Орбитаның түрлері осындай болу мүмкін, егер параметрі $p \neq 0$ және кинетикалық параметр $c \neq 0$ болса. $c = 0$ болған кезінде $\vec{r}$ мен $\dot{\vec{r}}$ бір біріне коллинеарлы, сонда координат басы арқылы өтетін сызық - орбита болады.

Осыдан жалпыландырылған Кеплердің бірінші заңының тұжырымдамасы орын алады:

Екі дененің салыстырмалы есебінде материалдық нүкте тартылыс центрі фокустардың біреуінде орналасқан екінші дәрежедегі қисығы бойымен қозғалады.

Егер координат жүйесінің центрі эллипс немесе гипербола, немесе парабола төбесімен сәйкес келсе және эллипстің үлкен осімен, гиперболаның нақты осімен немесе параболаның симметрия осімен x осі бағытталса каноникалық теңдеулер:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

- эллипс,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

- гипербола,

$$y^2 = 2px \quad (4)$$

- парабола үшін анықталады. a мен b - эллипстің үлкен және кіші немесе гиперболаның нақты мен жорамал жартылай остерінің ұзындығы.

Эллипс немесе гипербола центрінен фокустарына дейін арақашықтығы c – **фокустық арақашықтық** деп аталады. Сонда

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}, \quad (5)$$

«-» таңбасы эллипсқа, «+» - гиперболаға байланысты. Орбитаның фокалды параметрі: эллипс

$$p = a(1 - e^2). \quad (6)$$

және гипербола үшін

$$p = a(e^2 - 1). \quad (7)$$

Лаплас векторы тартылыс центрі орналасқан фокустан *орбитаның перицентріне* - ең жақын орналасқан төбеге бағытты көрсетеді. Эллипстік орбита кезінде тартылыс центрінен ең алыс орналасқан нүктені - *апоцентр* деп атайды. Перицентр мен апоцентр – *апсидтер*, осы екі нүктені қосатын сызық – *апсидтер* сызығы деп аталады. Егер жеке денелер айналасындағы қозғалыс болса, сонда апсидтер центрлік дененің көне грек сөзімен құрастырылады. Мысалы: Күн маңындағы орбиталар үшін – перигелий және афелий, Жер маңындағы орбиталар үшін – перигей және апогей, Ай маңындағы орбиталар үшін – периселений және апоселений, Марс маңындағы орбиталар үшін – периарий және апоарий нүктелері қарастырылады.

Орбита теңдеуінен басқа осы орбитадағы қозғалыс заңын қарастыру қажет. Басқаша айтқанда ν - шын аномалияның немесе r - радиустың t -

уақытқа тәуелділігін анықтау керек. Момент интегралының модулін қарастырайық

$$rV \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = c.$$

Радиус-векторына перпендикуляр орналасқан жылдамдықтың құраушысы немесе шеңберлік жылдамдық

$$V \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = r\omega, \quad (8)$$

$\omega = \dot{\nu}$ - бұрыштық жылдамдық,

$$r^2 \dot{\nu} = c. \quad (9)$$

Қозғалыс теңдеуін (9)-ші формуланы интегралдау арқылы анықтаймыз

$$\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (10)$$

τ - тәуелсіз тұрақтысы. Егер $t = \tau$, шын аномалияның мәні $\nu = 0$ болғанда, τ - ***m*** нүктенің орбита перицентрін өту моменті.

Орбиталдық координат жүйесінде ***m*** нүктенің радиус-векторы - $\vec{\rho} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ және орбиталдық координаталар

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu, \\ \eta &= r \sin \nu, \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Бастапқы X, Y, Z координат жүйесінде, екі дене есебінің шешімін табу немесе $\vec{r}$ радиус-векторын анықтау үшін, жүйеге салыстырмалы ξ, η, ζ координат жүйесінің бағытталған косинустар матрицаларын $\vec{\rho}$ векторына көбейту керек. ξ, η, ζ өстерінің бірлік векторлары - $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$. Бағытталған косинустар матрицалары $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ векторлардың құраушыларынан тұрады. $\vec{r}$ радиус-вектордың теңдеуі

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \cdot \vec{\rho}, \quad (12)$$

осында

$$\vec{P} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}, \quad \vec{Q} = \frac{\vec{c} \times \vec{\lambda}}{c\lambda}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{c}}{c}. \quad (13)$$

Екі дене есебінің жалпы шешімін $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, e, p, \tau$ тұрақты шамаларымен анықтауға болады.

Астрономияда *аспан дененің орбитасының интегралдау тұрақтыларын және орбита бойымен қозғалысын – орбита элементтері* деп атайды. $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ - орбитаның векторлық элементтері.

Момент интегралының басқаша жазылуы:

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{c}dt. \quad (14)$$

Егер $\vec{r}$ және $\vec{r} + d\vec{r}$ векторларымен құрастырылған үшбұрыштың ауданы S болса, сонда $\vec{r}$ радиус-вектор dt уақыт аралығында өтетін ауданның секторы

$$dS = \frac{1}{2}cdt \quad (15)$$

және аудан

$$S = \frac{1}{2}ct + c_0. \quad (16)$$

(15), (16) теңдеулер *Кеплердің екінші заңын* тұжырымдайды: *Кеплер қозғалысының секториалды жылдамдығы тұрақты болады* немесе *нүктенің радиус-векторы бірдей уақыт аралығында бірдей аудандары болатын секторлардан өтеді.*

2. Орбитаның Кеплер элементтері

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, e, p, \tau$ - орбита элементтері үш топқа бөлуге болады. Бірінші (векторлық элементтері - $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$) орбита жазықтықтың кеңістіктегі орналасуын және орбитаның бағыттауын көрсетеді. Екінші топ (e, p) орбитаның пішіні мен өлшемін анықтайды. Үшінші топта бір элемент - τ , ол материалдық нүктенің орбита бойымен қозғалуын сипаттайды, сондықтан осы элемент *динамикалық* деп аталады.

Қазіргі уақытта орбитаның орналасуын Эйлер бұрыштары арқылы қарастырады.

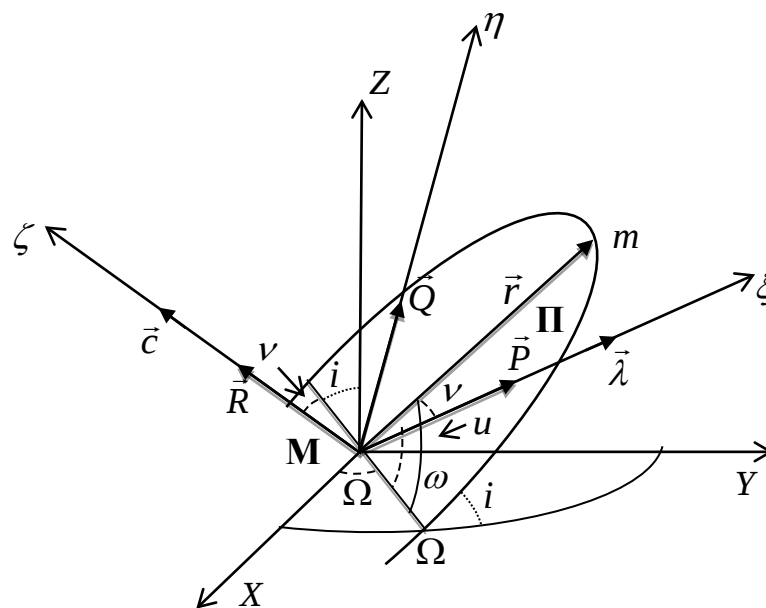
Негізгі ху координат жазықтығын орбита жазықтығы қиылысу нүктелері орналасқан бір түзу сызығымен кесіп өтеді. Бұл нүктелер *орбита түйіндері*, ал сызық – *түйіндер сызығы* деп аталады. Қозғалыс жағдайда t дененің z -координатасының (аппликатының) «-» таңбасынан «+» таңбасына ауысу кезіндегі немесе солтүстік бағытындағы қиылысу нүктесін - *жоғары түйіні Ω немесе солтүстік түйіні*, «+» таңбасынан «-» таңбасына ауысу кезіндегі немесе оңтүстік бағытындағы қиылысу нүктесін – *төменгі түйіні немесе оңтүстік түйіні* деп атайды.

Эйлердің бірінші бұрышы: бастапқы координат жүйесінің x осінің оң бағыты және орбитаның солтүстік түйін арасындағы бұрыш – *солтүстік*

немесе **жогары түйіннің бойлығы** деп аталады. Түйіннің бойлығы x осінен y осі бағытына есептейді. $0^\circ - 360^\circ$ дейін мәні өзгереді.

Эйлердің екінші бұрышы: солтүстік түйін мен орбита перицентрі бағыттары арасындағы бұрыш – ω - **перицентрлік арақашықтық** деп аталады. Перицентрлік арақашықтық түйін сызықтарынан m нүктенің қозғалу бағытына қарай есептейді. $0^\circ - 360^\circ$ дейін мәні өзгереді.

Эйлердің үшінші бұрышы: xy координат пен орбита жазықтықтарының арасындағы бұрыш - i **орбита еңкею** деп аталады. $0^\circ - 180^\circ$ дейін мәні өзгереді. Егер m нүктенің xy жазықтығына проекциясы ширектің бірінші бөлігінде қозғалса – **тура қозғалыс** болады және **орбита еңкею** $i < 90^\circ$. **Кері қозғалыс** болса: $i > 90^\circ$.



2 сурет – Орбиталдық координат жүйесі мен Эйлер бұрыштары

Екі дене есебінде $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ - **орбитаның кеплер элементтері** ретінде алынады. Бұл жиынтық кез келген қисықсызықты орбита үшін жарамды. Кейбір жағдайларда p параметр орнына a эллипстік орбитаның үлкен жарты осін енгізуге болады.

Орбитаның кеплер элементтері арқылы екі дене есебінің шешімін анықтаймыз. Радиус-вектордың бағыттау косинустары:

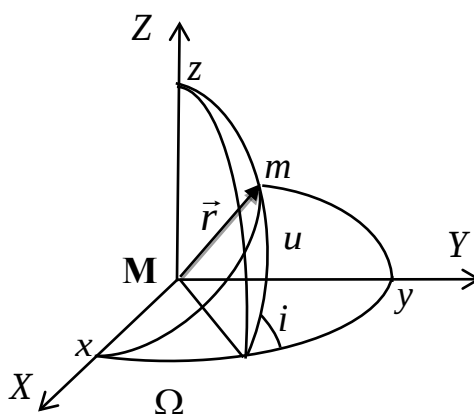
$$\frac{\vec{r}}{r} \equiv (\alpha, \beta, \gamma).$$

Аспан сферасына орбитаның проекциясын қарастырған кезінде $x\Omega m$ сфералық үшбұрышының қабырғалары мен бұрышы:

$$x\Omega = \Omega, \quad \Omega m = \omega + \nu = u, \quad x\Omega m = 180 - i. \quad (17)$$

u - *еңдік аргументі* (түйін сызықтарымен m нүктенің радиус-векторы арасындағы арақашықтық), ω – перицентрдің аргументі.

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(xm) = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i, \\ \beta &= \cos(ym) = \sin \Omega \cos u - \cos \Omega \sin u \cos i, \\ \gamma &= \cos(zm) = \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (18)$$



3 сурет – Радиус-вектордың бағыттау косинустарын есептеу

Бастапқы координат жүйесінде m нүктенің координаттары

$$\begin{aligned} x &= r\alpha = r \cos(xm) = r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i), \\ y &= r\beta = r \cos(ym) = r(\sin \Omega \cos u - \cos \Omega \sin u \cos i), \\ z &= r\gamma = r \cos(zm) = r \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (19)$$

Егер $u = \omega$ және $u = \omega + 90^\circ$ болса $\vec{P}$ және $\vec{Q}$ векторлары $\vec{r}/r$ тең болады. Сонда

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_y &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i. \end{aligned} \quad (21)$$

x, y, z осьтеріне $\vec{R}$ вектордың проекциясы

$$\begin{aligned} R_x &= \sin \Omega \sin i, \\ R_y &= -\cos \Omega \sin i, \\ R_z &= \cos i. \end{aligned} \quad (22)$$

Сонда екі дене есебінің жалпы шешімі

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \xi + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \eta. \quad (23)$$

(19) және (23) теңдеулерді t бойынша дифференциалдау арқылы жылдамдық векторының компоненттерін $\dot{\vec{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ анықтауға болады. Жылдамдық векторының құраушылары: $V_r = \dot{r}$ - **радиалды** және $V_n = r \dot{\nu}$ - **нормалды** (тангенциалды):

$$\begin{aligned} V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu, \\ V_n &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu), \\ V &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Бақылау сұрақтары

1. Екі дене есебі дегеніміз не және ол қандай алғышарттарға негізделеді?
2. Орбита теңдеуін шығару кезінде қандай шамалар тұрақты деп есептеледі?
3. Орталық тартылыс күші мен масса арасындағы байланыс қандай?
4. Екі дене есебінде қозғалыс заңы қандай түрде өрнектеледі?
5. Орбитаның түрі (шеңбер, эллипс, парабола, гипербола) қандай шамаларға тәуелді?
6. Кеплердің бірінші, екінші және үшінші заңдарының физикалық мәні неде?
7. Кеплер орбиталық элементтері қандай және олардың әрқайсысы нені сипаттайды?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы // Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.

2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. — Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.
6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.